問題１（配点60点）

出題の意図・採点基準

対数の定義と基本性質が理解できているか，対数の計算においては式変形の意味を理解しているか，また，対数関数の基本性質が理解できているかなどを問う。

各問いの採点においては, 計算や論証の過程, 記述が数学的に正しく題意に沿っていれば, 完全な解答でなくとも適宜部分点を与えて評価する。なお, 以下に示す解答例はあくまで一例にすぎない。

(1) の解答例

$p = \log_a M,\ q = \log_a N$ とおくと，対数の定義より $a^p = M,\ a^q = N$ である。指数法則から $MN = a^p a^q = a^{p+q}$ となり，対数の定義より

$$\log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N$$

である。

(2) の解答例

真数は正であるから，$x > 0$ かつ $x + 3 > 0$ より $x > 0$ である。与えられた不等式は

$$\log_{\frac{1}{2}} x^2 > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(x+3)$$

となり，底 $\frac{1}{2}$ は1より小だから，$x^2 < \frac{1}{2}(x+3)$ であり，整理して

$$2x^2 - x - 3 < 0 \qquad \text{すなわち} \qquad (2x-3)(x+1) < 0$$

である。これを解くと $-1 < x < \frac{3}{2}$ となるが，$x > 0$ より解は $0 < x < \frac{3}{2}$ である。

(3) の解答例

真数は正であるから，$x - 1 > 0$ かつ $0 < y = 3 - 2x$ より $1 < x < \frac{3}{2}$ である。与えられた式は

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(3-2x) = \log_{\frac{1}{2}}(-2x^2 + 5x - 3)$$

となる。底 $\frac{1}{2}$ は1より小だから，$-2x^2 + 5x - 3$ が $1 < x < \frac{3}{2}$ において最大となるとき，$\log_{\frac{1}{2}}(-2x^2 + 5x - 3)$ が最小となる。$-2x^2 + 5x - 3 = -2(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{1}{8}$ より，$x = \frac{5}{4}$ のとき $-2x^2 + 5x - 3$ は最大値 $\frac{1}{8}$ をとる。したがって，$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}} y$ は $x = \frac{5}{4}$ のとき最小値 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$ であり，またこのとき $y = \frac{1}{2}$ である。

問題２（配点70点）

出題の意図・採点基準

絶対値のついた関数について，

- グラフの概形を描くことができるか
- 定積分を計算することができるか
- 直線との共有点の個数を，様々な条件を吟味することにより求めることができるか

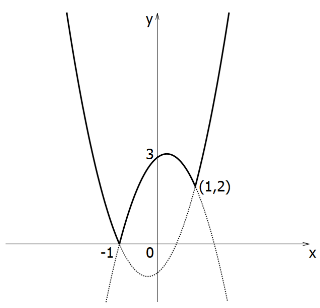
などを問う。

各問いの採点においては, 計算や論証の過程, 記述が数学的に正しく題意に沿っていれば, 完全な解答でなくとも適宜部分点を与えて評価する。なお, 以下に示す解答例はあくまで一例にすぎない。

(1) の解答例

$|2x^2-2| = \begin{cases} 2x^2-2 & (|x| \geqq 1) \\ -2x^2+2 & (|x| \leqq 1) \end{cases}$ より　$y = \begin{cases} 2x^2+x-1 & (|x| \geqq 1) \\ -2x^2+x+3 & (|x| \leqq 1) \end{cases}$ となる。したがって

$y=|2x^2-2|+x+1$ のグラフ C は下の図の実線部分である。($y=-2x^2+x+3$ の頂点の座標は $\left(\frac{1}{4}, \frac{25}{8}\right)$ である。また，$y=2x^2+x-1$ の y 切片は -1 で，頂点の座標は $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{8}\right)$ である。)



(2) の解答例

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\big(|2x^2-2|+x+1\big)dx &= \int_{-1}^{1}(-2x^2+x+3)dx + \int_{1}^{2}(2x^2+x-1)dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x\right]_{1}^{2} \\ &= \frac{59}{6}\end{aligned}$$

(3) の解答例

直線 $y=3x+a$ を y 軸方向に平行移動することにより，グラフ C との共有点の個数を調べる。

$y=2x^2+x-1$ の $1 \leqq x$ での接線の傾きは３より大きいこと，２点 $(-1,0)$ と $(1,2)$ を通る直線の傾きは１で３より小さいこと，および $y=3x+a$ が $y=-2x^2+x+3$ に接するときは，$-2x^2+x+3=3x+a$ が重解をもつときで，$a=\frac{7}{2}$，接点の座標は $(-\frac{1}{2},\ 2)$ となることに注意すれば，共有点の個数は次のようになる。

$a<-1$ のとき，共有点は０個
$a=-1$ のとき，$y=3x+a$ が $(1,2)$ を通るときで共有点は $(1,2)$ の１個
$-1<a<3$ のとき，共有点は２個
$a=3$ のとき，共有点は $(-1,0),\ (0,3),\ (2,9)$ の３個
$3<a<\frac{7}{2}$ のとき，共有点は４個
$a=\frac{7}{2}$ のとき，$y=3x+a$ が $y=-2x^2+x+3$ に接するときで共有点は３個
(共有点は $(-\frac{1}{2},\ 2)$ と $\left(\frac{1\pm\sqrt{10}}{2},\ \frac{10\pm3\sqrt{10}}{2}\right)$ (複号同順) である。)
$\frac{7}{2}<a$ のとき，共有点は２個

したがって，共有点が１個または３個となる a の値は $a=-1,\ 3,\ \dfrac{7}{2}$ である。

問題3 （配点70点）

出題の意図・採点基準

三角比・三角関数の公式の理解は十分か，公式を図形の計量問題に応用できるか，また，数列の項の挙動の考察において，式の適切な処理ができるかなどを問う。

各問いの採点においては, 計算や論証の過程, 記述が数学的に正しく題意に沿っていれば, 完全な解答でなくとも適宜部分点を与えて評価する。なお, 以下に示す解答例はあくまで一例にすぎない。

(1) の解答例

余弦の加法定理 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ において，$x = y = \dfrac{\theta}{2}$ とおくと

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

であるから

$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan^2\frac{\theta}{2}$$

である。

(2) の解答例

$\angle\mathrm{A} = \theta$ とおくと，$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ である。(1) より

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{4}$$

だから，$\mathrm{AP} = \dfrac{r}{\tan\frac{\theta}{2}} = 2r$ となる。

(3) の解答例

円 O_n と辺 AB との接点を Q とする。(2) と同様にして $\mathrm{QB} = 3r$ を得る。$5 = 2r + 2(n-1)r + 3r$ より $r = \dfrac{5}{2n+3}$ であり，$L_n = \dfrac{10n\pi}{2n+3}$ となる。よって

$$L_{n+1} - L_n = 10\pi\left(\frac{n+1}{2n+5} - \frac{n}{2n+3}\right) = \frac{30\pi}{(2n+3)(2n+5)} > 0$$

である。

(4) の解答例

(3) より $S_n = \dfrac{25n\pi}{(2n+3)^2}$ だから，

$$\frac{S_{n+1} - S_n}{25\pi} = \frac{n+1}{(2n+5)^2} - \frac{n}{(2n+3)^2} = \frac{-4n^2-4n+9}{(2n+3)^2(2n+5)^2}$$

である。これより $S_1 < S_2 > S_3 > S_4 > \cdots$ が得られ，S_n は $n = 2$ のとき最大である。