令和５年度　北海道教育大学札幌校編入学試験
解答例
教員養成課程 理数教育専攻 算数・数学教育分野（１／４）

問題１の解答例（出題の意図・採点基準）

問題 1. 空ではない有限集合 X を考える。n を自然数とし，X の元の個数は n 個であるとする。次の問いに答えよ。(100 点)

(1) $f: X \to X$ を写像とすると，次の２条件 (A),(B) は互いに同値であることを証明せよ。

(A) f は単射である。

(B) f は全射である。

(2) 集合 $\{f \mid f: X \to X$ は全単射である $\}$ の元の個数は $n!$ 個であることを示せ。

(3) 集合 $\{f \mid f: X \to X$ は全単射ではない $\}$ の元の個数を答えよ。

出題の意図. 集合と論理で基本的な全射・単射の概念を把握しているかを問う。

配点基準. (1) は６０点，(2) は２５点，(3) は１５点とする。どれも論理構成の不備に応じて減点する。

解答. (1).$(A) \Rightarrow (B)$ 集合 X の元の個数を n とし，$X = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ とすると，

$$f(X) = \{f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)\}$$

である。写像 f は単射であるから，元 $f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)$ は互いに異なり，集合 $f(X)$ は n 個の要素よりなる。$f(X) \subseteq X$ であるから，等式 $f(X) = X$ が成り立ち，f は全射であることが従う。

$(B) \Rightarrow (A)$ $f(X) = X$ であるから，$\{f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)\} = X$ が成り立つ。X の元の個数は n であるので，$i \neq j$ なら $f(a_i) \neq f(a_j)$ であり，f は単射である。

(2). $X = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ と思ってよい。すると f は全単射であることから $f(1), f(2), \cdots, f(n)$ は $1, 2, 3, \cdots, n$ の順列となっている。よって X は $n!$ 個の要素よりなっている。

(3). $n^n - n!$ 個である。

問題２の解答例（出題の意図・採点基準）

問題 2. 実数 a, b は $a < b$ を満たすものとする。区間 $[a, b]$ 上で定義された有界な関数 f が積分可能であるとき, f の不定積分

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \bigl(x \in [a, b]\bigr)$$

を定義することができる。次の問いに答えよ。(100 点)

(1) F は $[a, b]$ において連続であることを示せ。

(2) ある c $(a < c < b)$ において f が連続ならば, F は c で微分可能であり, $F'(c) = f(c)$ を満たすことを示せ。

(3) $f(x) = \begin{cases} 1 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ -1 & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$ に対して, F を求めよ。

出題の意図　関数の連続性と微分可能性の定義を正しく理解し, またリーマン積分の基本性質を使いこなせているかどうかを問う。

解答例と評価基準

(1) (40 点) $M = \sup\bigl\{|f(t)|\,\big|\,t \in [a, b]\bigr\}$ とおく。仮定より $M < \infty$ である。$x \in [a, b]$ は任意とする。任意の正数 ε に対して $\delta = \varepsilon/(M+1)$ とおく。このとき, h が $|h| < \delta$ かつ $x + h \in [a, b]$ を満たせば, 積分の基本性質を用いて

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt,$$

$$\therefore \ \bigl|F(x+h) - F(x)\bigr| \leqq \left|\int_c^{c+h} |f(t)|dt\right| \leqq M|h| < (M+1)\delta < \varepsilon$$

となる。 □

(2) (40 点) $t \geqq 0$ に対して $\omega(\delta) = \sup\bigl\{|f(t) - f(c)|\,\big|\,t \in [a, b],\ |t - c| \leqq \delta\bigr\}$ と定めれば, ω は単調増加な関数で, 仮定より $\displaystyle\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta) = 0$ を満たす。このとき,

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t)dt = \int_c^{c+h} \bigl\{f(t) - f(c)\bigr\}dt + hf(c),$$

$$\therefore \ \left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_c^{c+h} |f(t) - f(c)|dt\right| \leqq \omega(|h|) \to 0 \quad (h \to 0)$$

となる。 □

(3) (20 点) $x \leqq 0$ のときは微分積分学の基本定理を用いて

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt = \int_{-1}^{x} 1dt = \Big[t\Big]_{-1}^{x} = x + 1$$

となり, $x > 0$ のときは積分の基本性質と微分積分学の基本定理を用いて

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt = \int_{-1}^{0} 1dt + \int_{0}^{x} (-1)dt = F(0) + \Big[-t\Big]_{0}^{x} = 1 - x$$

となる。 □

(2) の証明を (1) のように ε-δ 論法の形式で書いてもよく, (1) の証明を (2) のような省略した形式で書いても差し支えないが, 極限操作をあいまいにしないこと。(3) は計算過程のない解答を不可とする。

令和５年度　北海道教育大学札幌校編入学試験
解答例
教員養成課程 理数教育専攻 算数・数学教育分野（４／４）

問題３の解答例（出題の意図・採点基準）

問題 3. ベクトル $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$ に対してベクトル積を

$$\vec{x}\times\vec{y}=(x_2y_3-x_3y_2, x_3y_1-x_1y_3, x_1y_2-x_2y_1)\in\mathbb{R}^3$$

で定める。また

$$(\vec{x},\vec{y})=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

を内積とする。次の問いに答えよ。(100 点)

(1) $\vec{x}\times\vec{y}$ は $\vec{x},\vec{y}$ と直交することを示せ。

(2) $|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2-(\vec{x},\vec{y})^2=|\vec{x}\times\vec{y}|^2$ を示せ。

(3) ベクトル積の長さ $|\vec{x}\times\vec{y}|$ は $\vec{x},\vec{y}$ を二辺とする平行四辺形の面積と等しいことを示せ。

出題の意図　３次元空間の内積を理解しているかを問う問題である。

解答例と評価基準

(1)

$$\begin{aligned}(\vec{x}\times\vec{y},\vec{x}) &= x_1(x_2y_3-x_3y_2)+x_2(x_3y_1-x_1y_3)+x_3(x_1y_2-x_2y_1)\\ &= x_1x_2y_3-x_1x_3y_2+x_2x_3y_1-x_2x_1y_3+x_3x_1y_2-x_3x_2y_1\\ &= 0\end{aligned}$$

であるから $\vec{x}\times\vec{y}$ と $\vec{x}$ は直交する。$\vec{x}\times\vec{y}$ と $\vec{y}$ も同様である。

(2)

$$\begin{aligned}|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2-(\vec{x},\vec{y})^2 &= (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\\ &= x_1^2y_1^2+x_1^2y_2^2+x_1^2y_3^2+x_2^2y_1^2+x_2^2y_2^2+x_2^2y_3^2+x_3^2y_1^2+x_3^2y_2^2+x_3^2y_3^2\\ &\quad -(x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+x_3^2y_3^2+2x_1y_1x_2y_2+2x_2y_2x_3y_3+2x_1y_1x_3y_3)\\ &= (x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2-2x_1y_1x_2y_2)+(x_1^2y_3^2+x_3^2y_1^2-2x_1y_1x_3y_3)\\ &\quad +(x_2^2y_3^2+x_3^2y_2^2-2x_2y_2x_3y_3)\\ &= (x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2+(x_2y_3-x_3y_2)^2\\ &= |\vec{x}\times\vec{y}|^2\end{aligned}$$

(3) $\vec{x}$ と $\vec{y}$ のなす角を θ とすると $(\vec{x},\vec{y})=|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned}|\vec{x}\times\vec{y}|^2=|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2-(\vec{x},\vec{y})^2 &= |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2-|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2\cos^2\theta=|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2(1-\cos^2\theta)\\ &= |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

$|\vec{x}||\vec{y}|\sin\theta$ は $\vec{x}$ と $\vec{y}$ を二辺とする平行四辺形の面積であるから題意は示された。

□

(1) は 30 点，(2) は 30 点，(3) は 40 点とする。軽微な計算ミスは５点以内の減点とする。